



## Σύντομη Παρουσίαση της Αξιοποίησης Ενός Γνωστικά Απαιτητικού Έργου που Υλοποιήθηκε στα Πλαίσια του Ερευνητικού Προγράμματος EDUCATE

**Ονοματεπώνυμο Εκπαιδευτικού:** Ελισάβετ Καλογερία

**Χώρα:** Ελλάδα

**Θέμα Μαθήματος:** Τεμνόμενες και παράλληλες ευθείες

**Επίπεδο Εκπαίδευσης:** Δευτεροβάθμια

**Ηλικία Μαθητών:** 13 (τέλος Α΄ Γυμνασίου)

**Διάρκεια μαθήματος:** 60 – 70 λεπτά

### **Μαθησιακοί στόχοι:**

- Διάκριση των εννοιών «τομή – καθετότητα / παραλληλία»
- Ένταξη των εννοιών του επιπέδου στον τρισδιάστατο χώρο - Αναγνώριση της προϋπόθεσης να είναι «ομοεπίπεδες»
- Επέκταση στις «ασύμβατες» ευθείες – διαχωρισμός τους από τις παράλληλες
- Αναπαράσταση και χειρισμός των εννοιών για την ένταξή τους στον χώρο μέσω αξιοποίησης λογισμικού, αλλά και χειραπτικού υλικού

### **Το γνωστικά απαιτητικό έργο:**

Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, οι βασικές έννοιες του επιπέδου διδάσκονται στην Α΄ Γυμνασίου και δεν εντάσσονται σε κάποιο πλαίσιο (π.χ. χώρος). Η Στερεομετρία στα περισσότερα σχολεία δεν διδάσκεται, καθώς τοποθετείται στο τέλος της Β΄ Γυμνασίου και ο διδακτικός χρόνος συχνά δεν επαρκεί. Ωστόσο, πολλές έννοιες της Στερεομετρίας απαντώνται συχνά στην ύλη της Α΄ Γυμνασίου, δημιουργώντας «πρωθύστερα» των οποίων η διδασκαλία εναπόκειται στην εμπειρία και γνώσεις του κάθε εκπαιδευτικού.

Παράλληλα, οι μαθητές συνήθως συναντούν δυσκολίες στην κατασκευή σχημάτων, στην ορθή χρήση γεωμετρικών οργάνων και γενικότερα στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Οι «κάθετες» ευθείες συνήθως ταυτίζονται με «οριζόντιες και κατακόρυφες» και οι παράλληλες αναγνωρίζονται κυρίως όταν είναι οριζόντιες.

Με αυτό το σκεπτικό και λαμβάνοντας υπόψη έναν γενικότερο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης που είναι οι μαθητές να μπορούν να κατανοούν τον χώρο που τους περιβάλλει και να λύνουν προβλήματα που συναντούν στην καθημερινότητά τους και σχετίζονται με αυτόν, υπάρχει ανάγκη για:

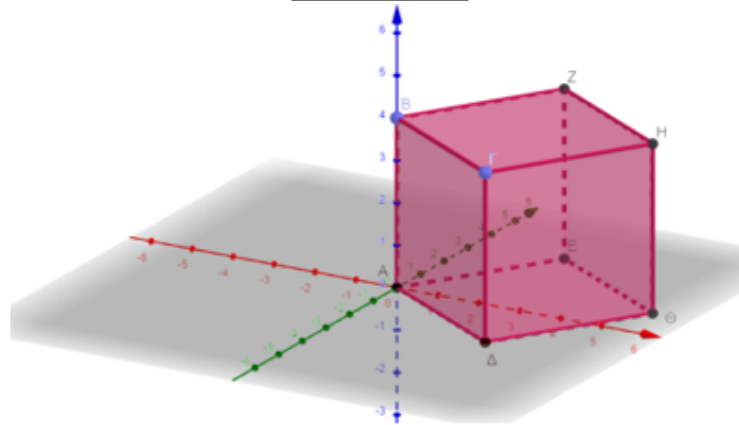
- προσδιορισμό των εννοιών του επιπέδου ως μέρος του χώρου, αλλά και
- διάκρισή τους από έννοιες με παραπλήσιους ορισμούς (π.χ. παράλληλες – ασύμβατες, κάθετες – ορθογώνιες).

Έτσι, στον κάθε μαθητή δόθηκε το παρακάτω Φύλλο Εργασίας (Φ.Ε.):

## Φύλλο εργασίας

Όνοματεπώνυμο:.....

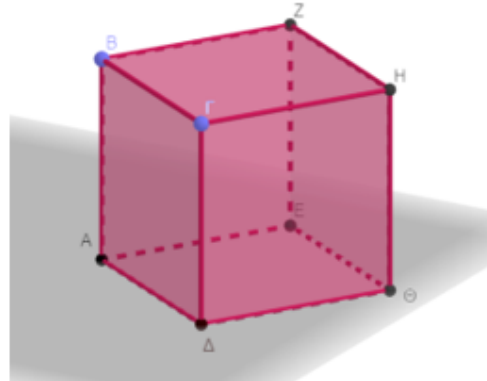
### Δραστηριότητες



**A. Στο παραπάνω σχήμα πρέπει να βρούμε:**

1. Ποια ευθύγραμμα τμήματα τέμνουν το τμήμα AB;  
.....
2. Ποια από τα παραπάνω τμήματα είναι κάθετα στο AB;  
.....
3. Ποια ευθύγραμμα τμήματα ΔΕΝ τέμνουν το τμήμα AB;  
.....
4. Ποια από τα παραπάνω τμήματα είναι παράλληλα με το τμήμα AB.  
.....

**B. Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να σχεδιάσουμε και άλλα τμήματα του κύβου που να είναι κάθετα στο AB στο σημείο B;**

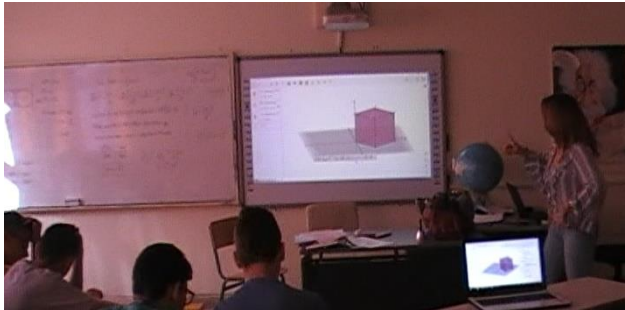
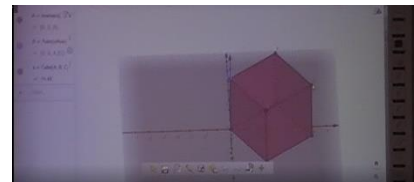
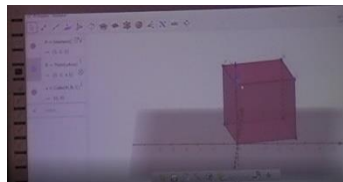
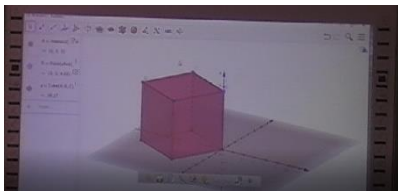


Για την συμπλήρωσή του, χωρίστηκαν σε διμελείς ομάδες και είχαν στη διάθεσή τους:

- τα παραδοσιακά μέσα (χαρτί, μολύβι, γεωμετρικά όργανα)
- έναν πραγματικό κύβο
- ένα αρχείο Geogebra (φαίνεται στο Φύλλο Εργασίας) το οποίο μπορούσαν:
  - ✓ να αυξομειώσουν,
  - ✓ να περιστρέψουν,
  - ✓ να δουν από διαφορετικές οπτικές γωνίες (όπως και τον πραγματικό κύβο).

**Περιγραφή της εξέλιξης του έργου κατά τη διδασκαλία:**

- ✓ **Χωρισμός σε ομάδες:** Δημιουργήθηκαν 9 διμελείς ομάδες με διαφορετικό τρόπο. Υπήρξαν δυο ομάδες αποτελούμενες από «αδύναμους» μαθητές, 2 ομάδες «μετρίων», 2 ομάδες «μετρίων και καλών» μαθητών, 2 ομάδες «άριστων» μαθητών και μια ομάδα «άριστου» με «αδύναμη» μαθήτριά. Το κάθε παιδί έπρεπε να συμπληρώσει το δικό του Φ.Ε.
- ✓ **Εισαγωγή του έργου:** α) Στους μαθητές παρουσιάστηκε το Geogebra 3D (ήταν ήδη εξοικειωμένοι στη χρήση του Geogebra στο επίπεδο), β) έγινε αναφορά στις βασικές ιδιότητες του κύβου με βάση τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, γ) κατασκευάστηκε στον διαδραστικό ο κύβος δ) παρουσιάστηκαν αναλυτικά οι 3 δυνατότητες (αυξομείωση, περιστροφή, διαφορετικές οπτικές γωνίες).



ε) συσχετίστηκε το σχήμα στο Geogebra με το στερεό που είχε η κάθε ομάδα στη διάθεσή της (περιστροφή, αλλαγή οπτικής γωνίας, ώστε να μοιάζει με το σχήμα στον διαδραστικό).

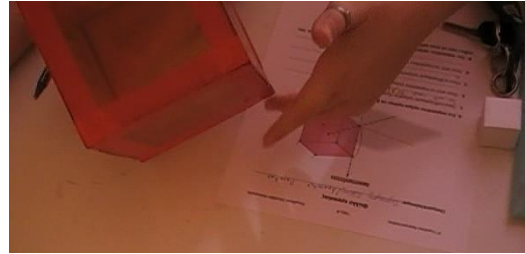


- ✓ **Αυτόνομη εργασία στις ομάδες:**

Στο Α ερώτημα απάντησαν όλες οι ομάδες, όχι με τον ίδιο βαθμό ευκολίας.

Στις ομάδες αδύναμων μαθητών χρειάστηκε να εξηγηθεί πιο διεξοδικά η λέξη «τέμνουν» και στη συνέχεια η πρόκληση ήταν να συσχετίσουν το σχήμα στο Φ.Ε. με το στερεό που είχαν μπροστά τους. Η διδακτική στρατηγική που επιλέχθηκε ήταν η χρήση μολυβιών ή στυλό, για αναπαράσταση των ακμών του κύβου ώστε να απαντήσουν στο ερώτημα Α1. Με την ίδια τεχνική ξεχώρισαν τα τμήματα που είναι παράλληλα με το ΑΒ από αυτά που απλώς δεν το τέμνουν (προσεγγίζοντας την έννοια των ασύμβατων).

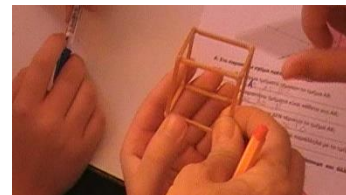
Στην ομάδα «άριστου-αδύναμης», ο πρώτος απάντησε με ευκολία, ενώ η δεύτερη ρωτήθηκε και τελικά έδειξε στο στερεό τις τέμνουσες και τις κάθετες. Δυσκολεύτηκε να προσδιορίσει αυτές που δεν φαίνονται, όμως με χρήση του πραγματικού στερεού, κατάφερε να τις προσδιορίσει τοποθετώντας το στυλό στις θέσεις αυτές και αναπαριστώντας τα αντίστοιχα γεωμετρικά αντικείμενα. Η πρόκληση στην ομάδα αυτή, ήταν η μαθήτρια να μην αντιγράψει τις απαντήσεις του συμμαθητή της, αλλά να είναι σε θέση περιστρέφοντας το στερεό της ώστε να έλθει στην ίδια οπτική γωνία με τον κύβο του Φ.Ε., να «δείξει» τις έννοιες με τα αντικείμενα που είχε στη διάθεσή της.



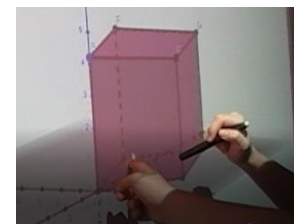
Σε ομάδα «μέτριου-καλού» η περιστροφή του στερεού και η αναπαράσταση ακμών με στυλό οδήγησε στην ανακάλυψη όχι μόνο των τεμνουσών του AB και από τους δυο μαθητές, αλλά ΚΑΙ στον διαχωρισμό τους σε ζευγάρια τεμνουσών που είναι ανά δυο παράλληλες (από τον «καλό» μαθητή). Το εύρημά τους λειτούργησε ως πρόκληση για να μπορέσουν να βρουν μια αιτιολόγηση και η δραστηριότητα αποτέλεσε εξαιρετικό πεδίο εφαρμογής του κανόνα που είχαν μάθει ότι «κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες» και άρα ομοεπίπεδες, γι' αυτό και βρήκαν 2 ζευγάρια παραλλήλων.



Σε μια ομάδα «άριστων» οι μαθητές για να σιγουρευτούν ότι στα ερωτήματα A1 και A3 δεν είχαν ξεχάσει κάποιο τμήμα, θέλησαν να μετρήσουν τις ακμές του κύβου. Εδώ, αναδείχθηκε από τη διδάσκουσα η πρόκληση να βρουν το πλήθος των ακμών χωρίς να τις μετρούν μια-μια, αλλά βρίσκοντας κάποιο εμπειρικό κανόνα (4 πάνω + 4 κάτω + 4 κατακόρυφες).

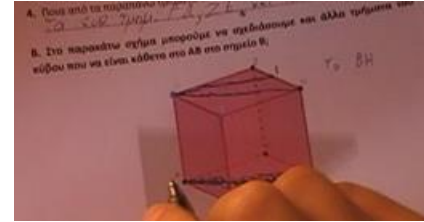


Σε άλλη ομάδα «άριστων» οι μαθητές θέλησαν να δείξουν τα ευρήματά τους στον διαδραστικό πίνακα, χρησιμοποιώντας όλες τις δυνατότητες κίνησης και μεταβολής του σχήματος. Με ευκολία οδηγήθηκαν στην έννοια των ασυμβάτων, διαχωρίζοντάς τις από τις παράλληλες μέσω επισήμανσης της προϋπόθεσης ότι αυτές είναι ομοεπίπεδες.

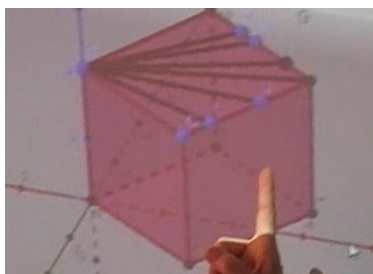


Το Βερώτημα που απαιτούσε από τους μαθητές κατασκευή τμημάτων πέραν αυτών που έβλεπαν στο σχήμα, δεν απαντήθηκε από τις ομάδες «αδύναμων».

Στην ομάδα «άριστου-αδύναμης», ο πρώτος σχεδιάζει συγκεκριμένα τμήματα, αλλά απαντά ότι μπορεί να σχεδιάσει άπειρα. Η πρόκληση από διδακτικής άποψης ήταν να μπορέσει και η δεύτερη να οδηγηθεί στο ίδιο συμπέρασμα. Χρησιμοποιώντας την τεχνική «αναπαριστούμε και δείχνουμε» με το στυλό τα γεωμετρικά αντικείμενα, καταφέρνει να δείξει εκτός από αυτά που βλέπει, μόνο τη διαγώνιο. Έτσι, ζητήθηκε από τον συμμαθητή της να τοποθετήσει το στυλό σε διαφορετικές θέσεις, ώστε να τη βοηθήσει να οδηγηθεί στη γενίκευση, ξεχωρίζοντας τα τμήματα που είναι κάθετα στο  $AB$  στο  $B$  σε αυτά που βλέπω και σε αυτά που μπορώ να κατασκευάσω.



Στην ομάδα «άριστων» που οι μαθητές επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν τον διαδραστικό, είναι χαρακτηριστική η λύση τους: στην αρχή παίρνουν πολλά σημεία στις ακμές απέναντι από το  $B$ , τα ενώνουν με το  $B$  και απαντούν πως οι λύσεις είναι άπειρες. Εδώ, η διδακτική πρόκληση ήταν να αξιοποιήσουν τις δυνατότητες γενίκευσης του λογισμικού, μέσα από την δυναμική κίνηση ενός σημείου. Με κατάλληλες παρεμβάσεις, παίρνουν τυχαίο σημείο  $I$  στην μια ακμή που βρίσκεται απέναντι από το  $B$ , και σημείο  $J$  στην άλλη. Φτιάχνουν τα τμήματα  $IB$ ,  $JB$  και μετακινώντας τα  $I$  και  $J$  πάνω στις αντίστοιχες ακμές, απαντούν ότι μπορούν να κατασκευάσουν άπειρα ευθύγραμμα τμήματα κάθετα στο  $AB$  στο σημείο  $B$ .



#### ✓ Η συζήτηση στην ολομέλεια

Συνοψίσθηκαν όλες οι απαντήσεις με συνδυασμένη χρήση όλων των υλικών που δόθηκαν στους μαθητές. Έμφαση δόθηκε κατά τη συζήτηση αυτή στην τεχνική που χρησιμοποιήθηκε σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος για αναπαράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων με υλικά αντικείμενα.





### ✓ Αναστοχασμός:

Η εμπειρία από την υλοποίηση της δραστηριότητας αυτής υπήρξε θετική και ως προς το σκέλος της συμμετοχής όλων των μαθητών της τάξης, αλλά και ως προς το σκέλος της μαθηματικής πρόκλησης. Υπήρξε διαφοροποίηση των διδακτικών στόχων στα διάφορα επίπεδα των μαθητών, αλλά και διαφοροποίηση των διδακτικών μεθόδων. Ιδιαίτερα ενδιαφέροντα κρίνεται η προσέγγιση στη μικτή ομάδα, αποτελώντας μια παραδειγματική διδακτική περίπτωση.