

ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ

Ξένια Ξυστούρη* και Δήμητρα Πίττα-Πανταζή**

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

*xistouri@cytanet.com.cy, **dpitta@ucy.ac.cy

Βασισμένο στα αποτελέσματα ενός ευρύτερου ερευνητικού προγράμματος που διερευνά την έννοια των γεωμετρικών μετασχηματισμών (μεταφορά, ανάκλαση, περιστροφή) στο δημοτικό, το άρθρο αυτό επικεντρώνεται στην περιγραφή των παραγόντων που συνθέτουν την ικανότητα των μαθητών στην ανάκλαση. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 166 μαθητές τετάρτης, πέμπτης και έκτης τάξης, στους οποίους δόθηκε ένα δοκίμιο στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ικανότητα της ανάκλασης στη γεωμετρία αποτελείται από τρεις βασικούς παράγοντες: την αναγνώριση των ιδιοτήτων της ανάκλασης, τον προσδιορισμό των παραμέτρων και την κατασκευή της εικόνας. Το άρθρο αναλύει την ικανότητα των μαθητών στον κάθε παράγοντα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μεγάλη έμφαση που δίνεται τις τελευταίες δεκαετίες στη διδασκαλία της γεωμετρίας έχει μεταβάλει το παραδοσιακό ευκλείδειο περιεχόμενό της, εισάγοντας νέους τύπους γεωμετρίας, όπως η γεωμετρία των μετασχηματισμών (Jones, 2002). Σύμφωνα με το NCTM (2000), «Τα εκπαιδευτικά προγράμματα από το νηπιαγωγείο μέχρι και την τρίτη λυκείου πρέπει να δίνουν στους μαθητές την ικανότητα να εφαρμόζουν τους μετασχηματισμούς και να χρησιμοποιούν τη συμμετρία για να αναλύσουν μαθηματικές καταστάσεις» (σελ. 41). Παρόλα αυτά, κάποιοι ερευνητές (Boulter & Kirby, 1994) υποστηρίζουν ότι η έρευνα στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς είναι περιορισμένη, κι αυτό αποδίδεται στην μειωμένη έμφαση που δίνεται στα αναλυτικά προγράμματα.

Σύμφωνα με τον Kidder (1976), η εκτέλεση μετασχηματισμών είναι μια πολυδιάστατη νοητική διεργασία. Υπάρχουν έρευνες που περιγράφουν της στρατηγικές μαθητών σε διαφορετικών τύπων έργα γεωμετρικών μετασχηματισμών (Edwards, 1990). Εντούτοις, οι παράγοντες που συνθέτουν την ικανότητα αυτή δε φαίνονται να είναι ακόμη ξεκάθαροι στη βιβλιογραφία. Το άρθρο αυτό βασίζεται στα αποτελέσματα της πιλοτικής έρευνας ενός ερευνητικού προγράμματος για τη δομή της ικανότητας των μαθητών στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (μεταφορά, ανάκλαση, περιστροφή). Ο σκοπός του είναι να διερευνήσει τους παράγοντες που συνθέτουν την ικανότητα μαθητών δημοτικού στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και τη δομή αυτής της ικανότητας. Ο

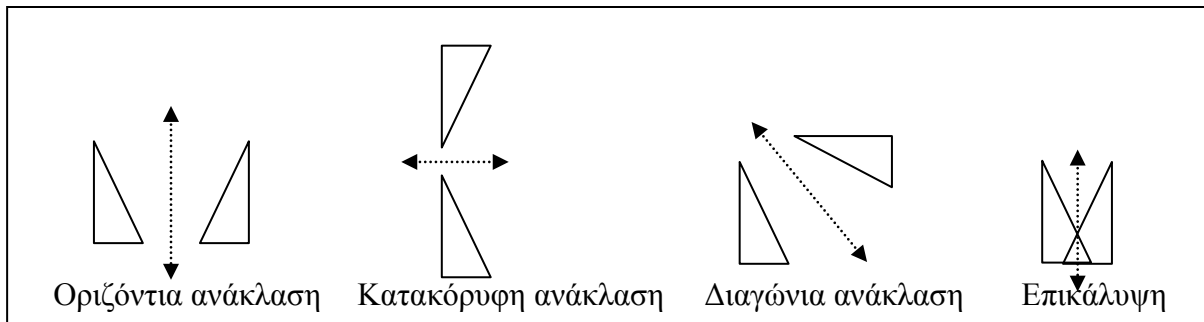
βασικός σκοπός του άρθρου είναι να αναπτύξει και να επιβεβαιώσει εμπειρικά ένα θεωρητικό μοντέλο για την ικανότητα στο γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης, χρησιμοποιώντας δείγμα μαθητών τετάρτης, πέμπτης και έκτης τάξης. Επιδιώκει, επίσης, να περιγράψει την επίδοση των μαθητών στον κάθε παράγοντα ικανότητας στην ανάκλαση.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η εισαγωγή της γεωμετρίας των μετασχηματισμών στα αναλυτικά προγράμματα στις αρχές της δεκαετίας του '70 κατεύθυνε το ενδιαφέρον της μαθηματικής κοινότητας προς τη σημασία της διδασκαλίας και κατανόησης της έννοιας αυτής (Jones, 2002). Οι πρώτες έρευνες επικεντρώθηκαν στο να τεκμηριώσουν ότι η διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών στο δημοτικό και στο γυμνάσιο είναι εφικτή, και μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα στην μάθηση των μαθηματικών (Edwards, 1990; Williford, 1972). Αργότερα, οι έρευνες επικεντρώθηκαν σε πιο ψυχολογικές διαστάσεις, όπως η ικανότητα των μαθητών και οι παρανοήσεις τους. Οι πρώτες από αυτές τις έρευνες στάθηκαν περισσότερο στην ικανότητα των μαθητών να εκτελούν γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (Kidder, 1976; Moyer, 1978), ενώ στη συνέχεια η έρευνα κατευθύνθηκε προς τη διερεύνηση των ικανοτήτων των μαθητών και των στρατηγικών τους σε διάφορα έργα, όπως η αναγνώριση και η εκτέλεση μετασχηματισμών (Hart, 1981; Edwards, 1990), καθώς και τη διερεύνηση των διαμορφώσεων που επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (Schultz & Austin, 1983). Οι Schultz και Austin (1983) εισηγούνται ότι το επίπεδο δυσκολίας για τα έργα των γεωμετρικών μετασχηματισμών επηρεάζεται από τη διεύθυνση (κατακόρυφη, οριζόντια, διαγώνια) και το μέγεθος του μετασχηματισμού. Το τελευταίο μπορεί να δημιουργήσει μεγάλες δυσκολίες στους μαθητές, ιδιαίτερα όταν το μέγεθος του μετασχηματισμού είναι τόσο μικρό, που ένα σχήμα και η εικόνα του μπορεί να επικαλύπτονται (βλέπε παραδείγματα για την ανάκλαση στην Εικόνα 1).

Φαίνεται ότι η έρευνα στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς μειώθηκε αισθητά γύρω στη δεκαετία του '80, αφήνοντας αναπάντητα ερωτήματα αναφορικά με τη γνωστική ανάπτυξη στην κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών (Boulter & Kirby, 1994). Για παράδειγμα ο Moyer (1978), τονίζει την ανάγκη για ανάπτυξη μιας ακολουθίας δραστηριοτήτων για την εκμάθηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών από παιδιά. Κάποιες έρευνες έχουν επιδιώξει να αναπτύξουν τέτοιες ακολουθίες, βασισμένες σε διαφορετικού τύπου έργα (Grenier, 1985; Molina, 1990; Yanik & Flores, 2009). Η Grenier (1985), επιχειρεί να αναπτύξει μια ακολουθία διδασκαλίας για έργα ανάκλασης ενός ευθύγραμμου τμήματος στη μέση εκπαίδευση, λαμβάνοντας υπόψη διάφορες διαμορφώσεις όπως είναι η απόσταση από τον άξονα συμμετρίας, ο προσανατολισμός του άξονα συμμετρίας, το είδος του χαρτιού (λευκό ή τετραγωνισμένο) και η κλίση του

σχήματος σε σχέση με τον άξονα. Παρόλο που η έρευνα αυτή δίνει κάποιες πολύ σημαντικές ενδείξεις για το πώς και σε ποιο βαθμό μπορούν να επηρεάσουν οι πιο πάνω διαμορφώσεις, εντούτοις περιορίζεται μόνο σε έργα κατασκευής και επιπλέον με αντικείμενο ανάκλασης ένα ευθύγραμμο τμήμα. Επίσης, οι Yanik και Flores (2009), έχουν αναπτύξει μια τέτοια ακολουθία για την κατανόηση της έννοιας της μεταφοράς συγκεκριμένα, από ένα φοιτητή εκπαιδευτικό. Παρόλα αυτά, οι παράγοντες που συνθέτουν την ικανότητα στον κάθε γεωμετρικό μετασχηματισμό δεν έχει ακόμη διερευνηθεί ποσοτικά. Σκοπός της έρευνας αυτής είναι να διερευνήσει τη σύνθεση της ικανότητας στην ανάκλαση από μαθητές δημοτικού, λαμβάνοντας υπόψη 1) διαφορετικού τύπου έργα που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (Hart, 1981; Edwards, 1990), και 2) διαμορφώσεις που αναφέρονται στη βιβλιογραφία (διεύθυνση και μέγεθος μετασχηματισμού) που μπορεί να επηρεάζουν την ικανότητα στην ανάκλαση (Grenier, 1985; Schultz & Austin, 1983).



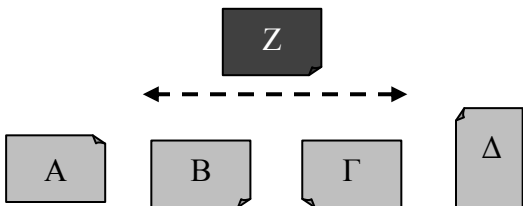
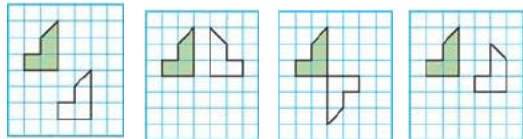
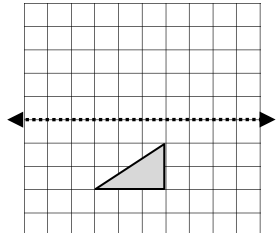
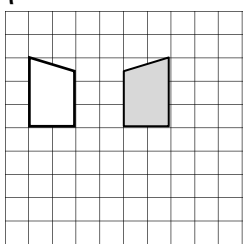
Εικόνα 1: Διαμορφώσεις που επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών στη γεωμετρία των μετασχηματισμών

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 166 μαθητές δημοτικού (78 αγόρια και 88 κορίτσια). Συγκεκριμένα, 52 ήταν μαθητές της τετάρτης τάξης, 53 της πέμπτης τάξης και 61 της έκτης τάξης. Όλοι οι μαθητές προέρχονταν από αγροτικά σχολεία της Κύπρου.

Το εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα ήταν ένα δοκίμιο με έργα στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, το οποίο αναπτύχθηκε ειδικά για το σκοπό της έρευνας, βασισμένο σε έργα προηγούμενων ερευνών. Το δοκίμιο αποτελείτο από τρία μέρη: το πρώτο αναφερόταν στη μεταφορά, το δεύτερο στην ανάκλαση και το τρίτο στην περιστροφή. Κάθε μέρος περιλάμβανε τεσσάρων διαφορετικών τύπων έργα: 1) αναγνώριση της εικόνας μιας μεταφοράς/ανάκλασης/περιστροφής ανάμεσα σε άλλες επιλογές, 2) αναγνώριση του μετασχηματισμού της μεταφοράς/ανάκλασης/περιστροφής ανάμεσα σε άλλες επιλογές, 3) κατασκευή της εικόνας για μια υποδειγμένη μεταφορά/ανάκλαση/περιστροφή, και 4) προσδιορισμό των παραμέτρων (σχέση ανάμεσα στο σχήμα και την εικόνα του) για μια υποδειγμένη

μεταφορά/ανάκλαση/περιστροφή (βλέπε Πίνακα 1 για παραδείγματα στην ανάκλαση για κάθε κατηγορία). Για κάθε τύπο έργου, δίνονταν τουλάχιστο τρία έργα: ένα σε οριζόντια, ένα σε κατακόρυφη κι ένα σε διαγώνια διεύθυνση. Στους τύπους έργων 3 και 4, δόθηκε ένα επιπλέον έργο με επικάλυψη του σχήματος από την εικόνα του και στον τύπο έργων 3 δόθηκε ένα επιπλέον έργο με άγνωστο σχήμα σε οριζόντια διεύθυνση. Τα έργα μοιράστηκαν σε δύο διαφορετικά μέρη με ίδιο περίπου βαθμό δυσκολίας και διανεμήθηκαν σε όλους τους μαθητές σε διάστημα περίπου μιας εβδομάδας. Οι μαθητές είχαν στη διάθεση τους περίπου 40 λεπτά για κάθε ένα από τα δύο μέρη του δοκιμίου. Για να αποφευχθούν τυχόν επιδράσεις εξάσκησης από το πρώτο στο δεύτερο μέρος του δοκιμίου, στους μισούς μαθητές δόθηκε πρώτα το ένα μέρος, και στους υπόλοιπους το άλλο μέρος.

<p>Έργα τύπου 1</p> <p>Ποιο από τα πιο κάτω σχήματα είναι συμμετρικό του αρχικού σχήματος Z σε οριζόντια γραμμή συμμετρίας;</p> 	<p>Έργα τύπου 2</p> <p>Ποια από τις πιο κάτω εικόνες παρουσιάζει την ανάκλαση του χρωματισμένου σχήματος;</p> 
<p>Έργα τύπου 3</p> <p>Βρες την ανάκλαση και ζωγράφισε το συμμετρικό του κάθε αρχικού σχήματος που δίνεται, χρησιμοποιώντας κάθε φορά τη διακεκομμένη γραμμή συμμετρίας.</p> 	<p>Έργα τύπου 4</p> <p>Βρες και χάραξε με τη ρίγα σου τη γραμμή συμμετρίας για κάθε περίπτωση.</p> 

Πίνακας 1: Τύποι έργων για το γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης

Μετά τη συμπλήρωση του δοκιμίου, οι απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν. Εφόσον αυτό το άρθρο επικεντρώνεται στη γεωμετρική ανάκλαση, θα παρουσιαστεί μόνο η διαδικασία βαθμολόγησης των έργων ανάκλασης. Τα έργα τύπου 1) αναγνώριση της εικόνας μιας ανάκλασης (3 έργα), και 2) αναγνώριση του μετασχηματισμού της ανάκλασης ανάμεσα σε άλλες επιλογές (4 έργα) ήταν έργα πολλαπλής επιλογής με τέσσερις εναλλακτικές επιλογές και βαθμολογήθηκαν με 0 βαθμούς για κάθε λανθασμένη επιλογή και με 1 βαθμό για κάθε ορθή επιλογή. Στα έργα τύπου 3, κατασκευή της εικόνας για μια υποδειγμένη ανάκλαση, η βαθμολόγηση έγινε ως ακολούθως: 0 βαθμοί για λανθασμένη ή καμία απάντηση, 0.2 για ορθή εικόνα με λανθασμένο προσανατολισμό, 0.4 για ορθή εικόνα σε λανθασμένη διεύθυνση, 0.6 για ορθή εικόνα σε λανθασμένη απόσταση από τον άξονα, 0.8 για ορθή εικόνα με ανακρίβειες στο μέγεθος του σχήματος και 1 για ορθή απάντηση σε όλες τις προαναφερθείσες παραμέτρους. Τέλος, για τα έργα τύπου 4, προσδιορισμός των παραμέτρων για μια υποδειγμένη ανάκλαση, βαθμολογήθηκε ως ακολούθως: 0 βαθμοί για λανθασμένη ή καμία απάντηση, 0.5 για σωστή διεύθυνση του άξονα αλλά σε λανθασμένη απόσταση από το σχήμα και με 1 βαθμό για ορθή απάντηση.

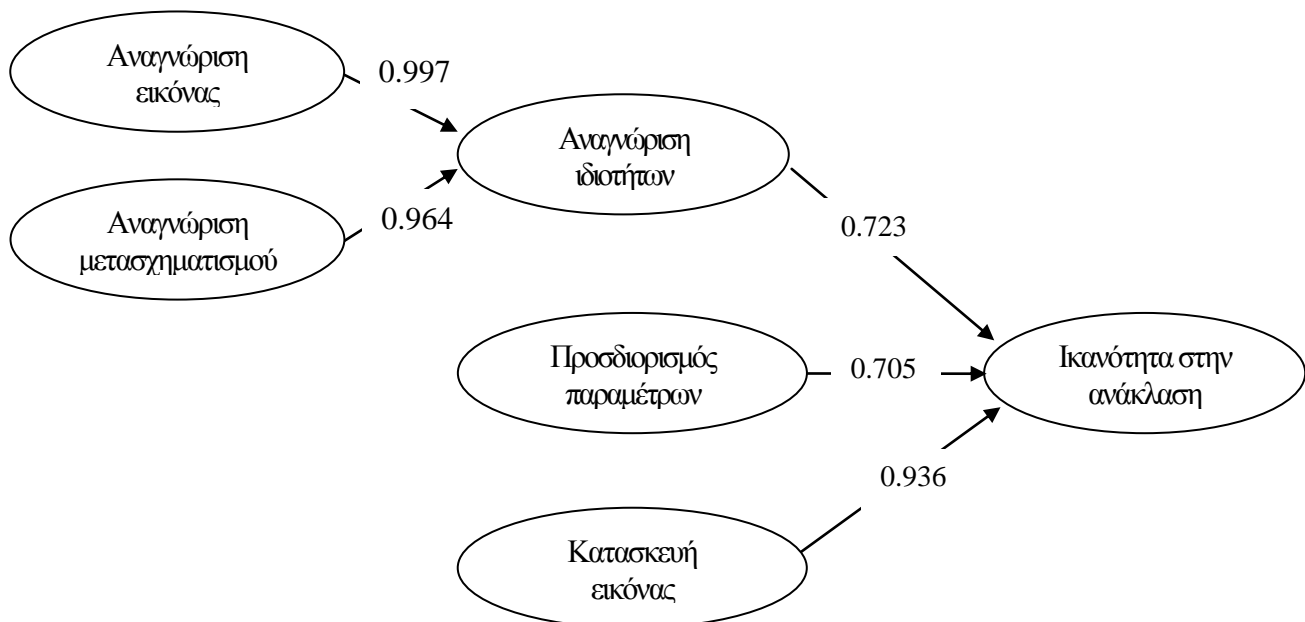
Για την επιβεβαίωση της εφαρμογής του προτεινόμενου μοντέλου, χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο MPLUS με τον δείκτη εκτίμησης μέγιστης πιθανότητας (Maximum Likelihood). Χρησιμοποιήθηκαν περισσότερα από ένα κριτήρια αξιολόγησης για να ελεγχθεί ο βαθμός στον οποίο τα δεδομένα της έρευνας επιβεβαιώνουν το προτεινόμενο θεωρητικό μοντέλο. Συγκεκριμένα, τα κριτήρια που χρησιμοποιήθηκαν και οι οριακές τους τιμές είναι: (α) ο λόγος ανάμεσα στο χ^2 και τους βαθμούς ελευθερίας, που πρέπει να είναι μικρότερο από 1.96, εφόσον ένα στατιστικά σημαντικό χ^2 υποδεικνύει μη-ικανοποιητική εφαρμογή του μοντέλου, (β) το δείκτη συγκριτικής εφαρμογής (Comparative Fit Index - CFI), οι τιμές του οποίου πρέπει να είναι ίσες ή μεγαλύτερες από 0.90, και (γ) το Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA), με αποδεκτή τιμή μικρότερη ή ίση με 0.06 (Muthén & Muthén, 2004).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο βασικός σκοπός του άρθρου αυτού είναι να περιγράψει και να επιβεβαιώσει εμπειρικά ένα θεωρητικό μοντέλο για την ικανότητα στο γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης, χρησιμοποιώντας δείγμα μαθητών τετάρτης, πέμπτης και έκτης τάξης δημοτικού. Μετά από διαδοχικούς ελέγχους μοντέλων, φάνηκε ότι το μοντέλο που παρουσιάζεται στην Εικόνα 2 έχει πολύ καλή εφαρμογή στα δεδομένα ($\chi^2/df = 1.292$, $df = 98$, $p = 0.0275$, $CFI = 0.930$ και $RMSEA = 0.042$).

Η Εικόνα 2 παρουσιάζει το προτεινόμενο μοντέλο για την ικανότητα στην ανάκλαση. Δύο από τους αναμενόμενους παράγοντες, η αναγνώριση της εικόνας για μια υποδειγμένη ανάκλαση και η αναγνώριση του μετασχηματισμού της ανάκλασης ανάμεσα σε εναλλακτικές επιλογές, φαίνεται να συνιστούν ένα δεύτερης τάξης

παράγοντα, ο οποίος συμβάλει σημαντικά στην ικανότητα στην ανάκλαση στο επίπεδο του δημοτικού. Ο παράγοντας αυτός ονομάστηκε «Αναγνώριση ιδιοτήτων» στο επίπεδο του δημοτικού, εφόσον θεωρούμε ότι το κοινό χαρακτηριστικό που συμερίζονται αυτά τα έργα είναι η αναγνώριση των ιδιοτήτων της ανάκλασης να αντιστρέφει τον προσανατολισμό ενός σχήματος, διατηρώντας το μέγεθος του και την απόστασή του από τον άξονα συμμετρίας. Η Εικόνα 2 παρουσιάζει επίσης ότι ο παράγοντας «Προσδιορισμός παραμέτρων» συμβάλει επίσης σημαντικά στην ικανότητα στην ανάκλαση, με δείκτη συνεισφοράς 0.705. Ο τελευταίος παράγοντας που παρουσιάζεται στο μοντέλο είναι η «Κατασκευή εικόνας», που φαίνεται να είναι πολύ σημαντικός παράγοντας για την ικανότητα στην ανάκλαση, με τον υψηλότερο δείκτη συνεισφοράς (0.936). Οι συντελεστές φόρτισης αποτελούν δείκτες της σημασίας του κάθε παράγοντα στην ικανότητα της ανάκλασης. Όλες οι φορτίσεις είναι ψηλές (μεγαλύτερες από 0.7) και δείχνουν ότι όλοι οι παράγοντες έχουν σημαντική συνεισφορά. Επιπλέον, όλοι οι δείκτες είναι στατιστικά σημαντικοί σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.



Εικόνα 2: Το προτεινόμενο μοντέλο της ικανότητας στην ανάκλαση

Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τους δείκτες εφαρμογής για το μοντέλο του ενός παράγοντα και του προτεινόμενου μοντέλου. Το μοντέλο του ενός παράγοντα υποθέτει ότι όλες οι μεταβλητές φορτίζουν σε ένα μόνο παράγοντα πρώτης τάξης, ο οποίος θεωρείται ότι είναι η ικανότητα στην ανάκλαση, και ότι δεν υπάρχουν υπο-παράγοντες οι οποίοι να συνθέτουν τη γενική αυτή ικανότητα. Αυτό θα σήμαινε ότι η ικανότητα στην ανάκλαση είναι μονοδιάστατη. Η σύγκριση των δύο μοντέλων φανερώνει ότι το προτεινόμενο μοντέλο εφαρμόζει στα δεδομένα πολύ καλύτερα από το μονοδιάστατο μοντέλο, μιας και οι δείκτες εφαρμογής του μονοδιάστατου μοντέλου δεν είναι μέσα στα αποδεκτά

όρια τιμών ($\chi^2/df < 1.96$, $CFI > 0.90$, $RMSEA < 0.06$). Αυτό ενισχύει τη θέση του Kidder (1976) ότι η ικανότητα στους μετασχηματισμούς είναι πολυδιάστατη οντότητα. Στην περίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ακόμη κι ένας μόνο τύπος μετασχηματισμών, η ανάκλαση, έχει τη δική του δομή από διαφορετικούς παράγοντες.

	χ^2	df	χ^2/df	χ^2 difference	df difference	CFI	RMSEA
Μοντέλο ενός παράγοντα	200.149	104	1.925			0.766	0.075
Θεωρητικό μοντέλο	126.602	98	1.292	73.547	6	0.930	0.042

Πίνακας 2: Εναλλακτικά μοντέλα στην ικανότητα στην ανάκλαση

Ο Πίνακας 3 παρουσιάζει τους μέσους όρους επίδοσης των μαθητών στον κάθε παράγοντα. Αυτό που φαίνεται ξεκάθαρα στον πίνακα είναι ότι ο παράγοντας «Προσδιορισμός των παραμέτρων» φαίνεται να είναι ο ευκολότερος για τους μαθητές ($\bar{X} = 0.654$, $SD = 0.263$), ενώ ο δυσκολότερος φαίνεται να είναι η αναγνώριση ιδιοτήτων ($\bar{X} = 0.393$, $SD = 0.245$). Στον παράγοντα «Προσδιορισμός των παραμέτρων», τα πιο συνηθισμένα λάθη των μαθητών ήταν να τοποθετούν τον άξονα συμμετρίας σε λανθασμένη απόσταση από το σχήμα, ενώ στην περίπτωση της διαγώνιας ανάκλασης δυσκολεύονταν να αναγνωρίσουν τη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας, και οι περισσότεροι τον ζωγράφιζαν ως κατακόρυφο. Στην περίπτωση της αναγνώρισης ιδιοτήτων, το πιο συνηθισμένο λάθος των μαθητών ήταν το να επιλέγουν τη μετατόπιση ως περίπτωση ανάκλασης. Τέλος, στην κατασκευή της εικόνας ενός σχήματος που ανακλάται, τα λάθη των μαθητών διαφοροποιούνταν ιδιαίτερα ανάλογα με τις διαμορφώσεις. Στην περίπτωση του κατακόρυφο άξονα, το πιο συνηθισμένο λάθος ήταν η λανθασμένη απόσταση από τον άξονα. Στην περίπτωση του διαγώνιου άξονα, το πιο συνηθισμένο λάθος ήταν ο προσανατολισμός της εικόνας, μαζί με την απόσταση από τον άξονα. Στην περίπτωση της επικάλυψης, πολλοί μαθητές δεν αντιλαμβάνονταν ότι η εικόνα μπορεί να διαπερνάται από τον άξονα, τη ζωγράφιζαν με σωστό προσανατολισμό αλλά εφαπτόμενη στον άξονα. Στην ίδια περίπτωση, αρκετοί μαθητές αντιλαμβάνονταν ότι η εικόνα του σχήματος μπορεί να διαπερνάται από τον άξονα, δεν μπορούσαν όμως να αντιληφθούν ότι μπορεί να επικαλύπτει το αρχικό σχήμα. Στις περιπτώσεις αυτές, οι μαθητές ζωγράφιζαν την εικόνα στη σωστή θέση σε σχέση με τον άξονα, αλλά χαμηλότερα από την αρχική εικόνα. Οι περιπτώσεις

κατασκευής με διαγώνιο άξονα καθώς και οι περιπτώσεις με επικάλυψη φαίνεται να είναι οι δυσκολότερες και στην έρευνα της Grenier (1985) με μαθητές γυμνασίου.

Παράγοντας	\bar{X}	SD
Αναγνώριση ιδιοτήτων	0.393	0.245
Προσδιορισμός παραμέτρων	0.654	0.263
Κατασκευή εικόνας	0.468	0.264

Πίνακας 3: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις επίδοσης στους παράγοντες

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο σκοπός του άρθρου αυτού ήταν να αναπτύξει ένα θεωρητικό μοντέλο για την ικανότητα της γεωμετρικής ανάκλασης στη δημοτική εκπαίδευση. Τα ευρήματα της έρευνας αυτής φανερώνουν ότι η ικανότητα των μαθητών δημοτικού στη γεωμετρική ανάκλαση αποτελείται από τρεις βασικούς παράγοντες: την αναγνώριση των ιδιοτήτων της ανάκλασης, τον προσδιορισμό των παραμέτρων μιας υποδειγμένης περίπτωσης ανάκλασης και την κατασκευή της εικόνας ενός σχήματος. Η δομή του μοντέλου αυτού ενισχύει την άποψη του Kidder (1976) ότι η εκτέλεση των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι πολυδιάστατη νοητική διεργασία, και σε αυτή την περίπτωση στην περίπτωση του γεωμετρικού μετασχηματισμού της ανάκλασης.

Ο πρώτος παράγοντας είναι η αναγνώριση των ιδιοτήτων της ανάκλασης. Αποτελείται από δύο υπο-παράγοντες: την αναγνώριση της εικόνας του σχήματος μετά από ανάκλαση και 2) την αναγνώριση του μετασχηματισμού της ανάκλασης. Τα κοινά χαρακτηριστικά που διέπουν αυτούς τους δύο υπο-παράγοντες, και κατ' επέκταση τον παράγοντα της αναγνώρισης των ιδιοτήτων του γεωμετρικού μετασχηματισμού της ανάκλασης, είναι η αναγνώριση των χαρακτηριστικών του σχήματος που διατηρούνται και των χαρακτηριστικών που μεταβάλλονται όταν αυτό ανακλάται από τους μαθητές. Αυτά είναι η διατήρηση των διαστάσεων του σχήματος, η διατήρηση της απόστασης του σχήματος από τον άξονα συμμετρίας και η αντιστροφή του προσανατολισμού του ως προς τον άξονα συμμετρίας (Schultz & Austin, 1983). Στα έργα και των δύο υπο-παραγόντων, οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν το αρχικό σχήμα με την εικόνα του και να αποφασίσουν κατά πόσο το ένα από τα δύο έχει αντίστροφο προσανατολισμό, κι αν το μέγεθος του σχήματος και η απόσταση του από τον άξονα συμμετρίας παραμένουν αμετάβλητα. Αυτός ο παράγοντας της ικανότητας στην ανάκλαση φαίνεται να είναι ο δυσκολότερος για τους μαθητές, ενδεχομένως γιατί χρειάζεται αρκετές συντονισμένες παρατηρήσεις ανάμεσα σε δύο ή και περισσότερα σχήματα.

Ο δεύτερος παράγοντας της ικανότητας στο γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης είναι ο προσδιορισμός των παραμέτρων για ένα δεδομένο μετασχηματισμό. Σε αυτού του τύπου έργα, οι μαθητές παίρνουν τις ιδιότητες (αλλαγή προσανατολισμού και διατήρηση σχήματος και των διαστάσεων του) για δεδομένα, μιας και ήδη γνωρίζουν ότι τα σχήματα σχετίζονται με ανάκλαση και δίνονται τόσο το σχήμα όσο και η εικόνα του. Η προσοχή των μαθητών επικεντρώνεται στον προσδιορισμό των δύο παραμέτρων της ανάκλασης, τη διεύθυνση του άξονα και την απόστασή του από το σχήμα. Συνεπώς, χρειάζεται να αντιληφθούν τη σωστή διεύθυνση και ακολούθως να μετρήσουν την απόσταση ανάμεσα στα δύο σχήματα, εφόσον αντιλαμβάνονται ότι ο άξονας πρέπει να βρίσκεται ακριβώς στο μέσο της απόστασης αυτής. Τα έργα του παράγοντα αυτού φαίνεται να είναι τα ευκολότερα για τους μαθητές, εφόσον αντιλαμβάνονται εύκολα τη διεύθυνση του άξονα, παρατηρώντας τη σχέση ανάμεσα στις πλευρές του σχήματος και ιδιαίτερα όταν είναι παράλληλες μεταξύ τους, και στη συνέχεια βρίσκουν το μέσο της απόστασης αριθμητικά.

Ο τρίτος παράγοντας είναι η κατασκευή της εικόνας για ένα υποδειγμένο σχήμα, μετά από ανάκλαση. Σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να εκτελούν την ανάκλαση, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις ιδιότητες και τις παραμέτρους ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές χρειάζεται να εκτελέσουν την ανάκλαση ακολουθώντας της σωστή διεύθυνση και διατηρώντας τη σωστή απόσταση από τον άξονα (μετρώντας τις μονάδες). Ταυτόχρονα, πρέπει να αντιστρέψουν το σχήμα, διατηρώντας όμως αμετάβλητα τις ιδιότητες και το μέγεθος του. Τα έργα αυτά απαιτούν αρκετές δεξιότητες όμοιες με τα έργα του παράγοντα της αναγνώρισης ιδιοτήτων, και κανείς θα ανέμενε να ήταν εξίσου δύσκολα για τους μαθητές. Παρόλα αυτά, φαίνεται ότι ενδεχομένως να διευκόλυνε τους μαθητές το γεγονός ότι στις περιπτώσεις αυτές ο άξονας συμμετρίας ήταν δεδομένος.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής είναι σημαντικά, τόσο για τη διδασκαλία όσο και για την αξιολόγηση της ικανότητας στο γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους κατά το σχεδιασμό της διδασκαλίας τους όλους τους παράγοντες που συνθέτουν την ικανότητα αυτή. Περαιτέρω έρευνα μπορεί να επικεντρωθεί στη διερεύνηση αποτελεσματικών μεθόδων διδασκαλίας για την προώθηση της κατανόησης σε όλους τους παράγοντες της ικανότητας στο γεωμετρικό μετασχηματισμό της ανάκλασης, καθώς και στη διερεύνηση μιας αποτελεσματικής ακολουθίας διδασκαλίας όλων των παραγόντων σε επίπεδο δημοτικής εκπαίδευσης.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή εμπίπτει στο Πλαίσιο της Δέσμης Προγραμμάτων για Έρευνα, Τεχνολογική Ανάπτυξη και Καινοτομία 2009-2010 (ΔΕΣΜΗ 2009-2010) του Ιδρύματος Προώθησης Έρευνας Κύπρου, που συγχρηματοδοτείται από την Κυπριακή Δημοκρατία και το Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης της ΕΕ (Επιχορήγηση: ΠΕΝΕΚ/0609/57).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Boulter, D. R., & Kirby, J. R. (1994). Identification of strategies used in solving transformational geometry problems, *Journal of Educational Research*, 87 (5), 298-303.
- Edwards, L. (1990). Children's learning in a computer microworld for transformation geometry (Doctoral dissertation, University of California, Berkeley, 1990). *Dissertation Abstracts International*. 51(6). 1943A.
- Grenier, D. (1985). Middle school pupils' conception about reflections according to a task of construction. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 183-188). Utrecht, The Netherlands: Program Committee.
- Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: CSMS, University of London.
- Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics* (pp. 121-139). London: RoutledgeFalmer. Retrieved from <http://eprints.soton.ac.uk/13588/>
- Kidder, R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7 (1), 40-52.
- Molina, D. D. (1990). The applicability of the van Hiele theory to transformational geometry (Doctoral dissertation, The University of Texas, 1990). *Dissertation Abstracts Online*, 44, 417A.
- Moyer, J. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9 (2), 83-92.
- Muthén, L., & Muthén, B. (2004). *Mplus User's Guide. Third Edition*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.
- National Council of Teachers of Mathematics (2002). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Schultz, K. & Austin, J. (1983). Directional effects in transformation tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14 (2), 95-101.
- Williford, H. J. (1972). A study of transformational geometry instruction in the primary grades. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3, 260-271.
- Yanik, H. B., & Flores, A. (2009). Understanding of rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 41-57.